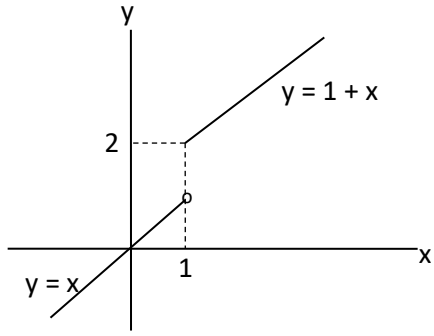
2. Süreklilik

2.1 Uzaklık, Süreklilik ve Limit
2.2 Reel Değerli Fonksiyonlarda Süreklilik
2.3 Vektör Değerli Fonksiyonlarda Süreklilik
2.4 Sürekliliğin Sonuçları

2.1 Uzaklık, Süreklilik ve Limit

Fonksiyonların en temel özelliği sürekliliktir. Kabaca bir f: D → Y bir fonksiyonu bir $x_o \in D$ noktasında sürekliyse x değişkeni D içinde x_o noktasına yaklaştıkça (bunu $x \to x_o$ olarak göstereceğiz), karşı gelen f(x) değerleri de Y içinde $f(x_o)$'a yaklaşır ($f(x) \to f(x_o)$). Örneğin, f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + x, x \geq 1 \\ x, \quad x < 1 \end{cases}$ fonksiyonu x = 1 noktasında bu anlamda sürekli değildir.



Şekil 2.1 Bir noktada süreksizlik

$f(x_o = 1) = 2$ dir. x_o noktasına sağdan ($x > x_o$) yaklaşılırsa $f(x) \to 2$ olur. Ama soldan ($x < x_o$) yaklaşıldığında fonksiyonun değeri y = x doğrusu üzerinde 1 değerine yaklaşır, dolayısıyla da x = 1 noktasında sıçrama olur.

Bu süreklilik tanımını formülleştirmek için "yakınlık" kavramını açmamız gerekir. İki reel sayı arasındaki uzaklık iki sayının farkının mutlak değeridir. Mutlak değer fonksiyonunun özellikleri kullanılarak uzaklık kavramı soyut uzaylara genellenir. Bu özellikler şunlardır: x, y, z ∈ $\mathbb{R}$ için

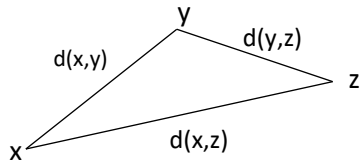
a) $|x - y| \geq 0$ ve $|x - y| = 0 \leftrightarrow x = y$: uzaklık pozitiftir ve a.v.a iki nokta aynıysa sıfırdır,

b) $|x - y| = |y - x|$: uzaklık simetriktir,

c) $|x - z| \leq |x - y| + |x - y|$: üçgen eşitsizliği, iki nokta arasındaki uzaklık bu noktaların üçüncü bir noktadan olan uzaklıkları toplamından azdır (bir üçgenin iki kenarının toplamı üçüncüden az olamaz).

Tanım 2.1 X bir küme (uzay) olsun. Mutlak değer fonksiyonunun özelliklerini sağlayan bir d: X×X → ℝ reel değerli fonksiyonuna **uzaklık fonksiyonu (ya da metrik)** denir. Buna göre her x, y, z ∈ X

1. d(x, y) ≥ 0, ve d(x, y) = 0 a.v.a x = y,
2. d(x, y) = d(y, x),
3. d(x, z) ≤ d(x, y) + d(z, y).



Düzlemde Üçgen Eşitsizliği

Bir küme kendi üzerinden tanımlı bir uzaklık fonksiyonu ile birlikte **metrik uzay** tanımlar. Örneğin d mutlak değer fonksiyonu olmak üzere (ℝ, d) metrik bir uzaydır. $\mathbb{R}^n$ üzerinde (olağan) metrik

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

olarak tanımlanır (sadece pozitif kökler alınacağı açıktır). Dikkat edilirse n = 1 için d = |x – y| olur. ($\mathbb{R}^n$, d) bir metrik uzaydır. $\mathbb{R}^n$ için farklı bir metrik olarak $\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$ tanımlanabilir.

İşe bu tanımı kullanarak sürekliliği formel olarak tanımlayabiliriz.

Tanım 2.2 (Süreklilik) D ⊆ (X, d) ve f: D → (Y, d) bir fonksiyon ve x_o ∈ D olsun. Eğer her ε > 0 için, öyle bir δ > 0 varsa ki

$$x \in D \text{ ve } d(x, x_o) < \delta \rightarrow d(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$$

(δ genel olarak x_o ve ε'a bağlı olmak üzere) oluyorsa fonksiyon x_o noktasında süreklidir denir. Eğer fonksiyon tanım kümesinde her noktada sürekliyse D üzerinde süreklidir denir.

Her $\varepsilon > 0$ (ne kadar küçük olursa olsun) seçimi için $d(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$ demek görüntü kümesinde $f(x_o)$ noktasına ε'dan daha yakın olmalıyız demektir. Fonksiyon sürekliyse bunu sağlayacak şekilde tanım kümesinde uygun bir $\delta > 0$ için x_o noktasına δ'dan daha yakın noktalar vardır ($d(x, x_o) < \delta$).

Şekil 1'deki örnekte $x_o = 1$ ve $f(x_o) = 2$ iken $\varepsilon = 0.1$ olsun Buna göre $d(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$ şartını sağlayan değerler $(2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon) = (1.9, 2.1)$ açık aralığındadır. O halde fonksiyonun $x_o = 1$ noktasında sürekli olması için her $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ için $f(x) \in (1.9, 2.1)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ olduğunu gösterebilmemiz gerekir. Ama böyle bir δ yoktur. Çünkü, $x \in (1 - \delta, 1 + \delta) \rightarrow f(x) \in (1 - \delta, 2 + \delta)$ olur ve $(1 - \delta, 2 + \delta) = (1.9, 2.1)$ olacak şekilde $\delta > 0$ yoktur. Öte yandan şekildeki fonksiyon her $x \neq 1$ noktasında süreklidir. Her $\varepsilon > 0$ için $d(f(x), f(x_o)) < \varepsilon$ şartını sağlayan değerler

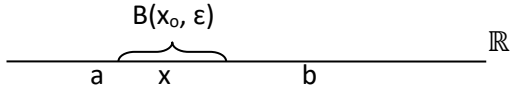
$x_o < 1$ için $(f(x_o) - \varepsilon, f(x_o) + \varepsilon) = (x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$
$x_o > 1$ için $(f(x_o) - \varepsilon, f(x_o) + \varepsilon) = (1 + x_o - \varepsilon, 1 + x_o + \varepsilon)$

olur. Her iki durumda da $\delta = \varepsilon > 0$ arzulanan şartı sağlar: $x \in (x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$ olduğunda $f(x) \in (f(x_o - \varepsilon), f(x_o + \varepsilon))$ olur.

Süreklilik kavramını fonksiyonların limiti cinsinden de ifade edebiliriz. Önce biraz tanım yapmak gerekiyor.

Tanım 2.3 (iç nokta, açık/kapalı küme) $D \subseteq (X, d)$ ve $x_o \in D$ olsun.

1. Bir $\varepsilon > 0$ için $B(x_o, \varepsilon) = \{x: d(x, x_o) < \varepsilon\}$, yani x_o'a ε'dan daha yakın noktalar, kümesine x_o'ın **ε-komşuluğu** denir. Reel sayılar için bu bildiğimiz $(x_o - \varepsilon, x_o + \varepsilon)$ açık aralığıdır.
2. $x_o \in A \subseteq D$ olsun. Bir $\varepsilon > 0$ için $B(x_o, \varepsilon) \subset A$ oluyorsa x_o A kümesinin **iç noktasıdır** denir. Yani x_o'ın bir ε-komşuluğu tamamen A'nın içinde kalır. Örneğin, reel sayı kümesi $A = [a, b]$ içinde a bir iç nokta değildir: hiç bir $\varepsilon > 0$ için $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ tamamen A içinde kalmaz. Benzer şekilde b noktası da iç nokta değildir. Ama her $a < x < b$ A kümesinin iç noktasıdır: $\varepsilon = 0.5\min(d(a, x), d(b, x)) > 0$ dersek arzulanan ε-komşuluğu oluşur ($\min(x, y)$ ikisinden küçük olanı demektir).

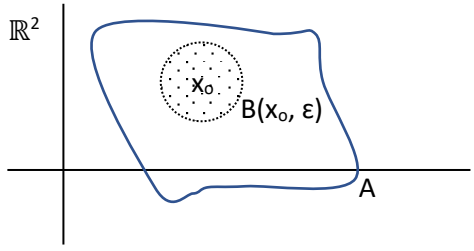


Bir kümenin bütün iç noktaları **içA** olarak gösterilir.

3. $A \subseteq D$ olsun. A'nın her elemanı bir iç noktaysa, yani $A = \text{iç}A$ ise, A **açık bir kümedir** denir. Reel sayılar için $A = (a, b)$ açık aralığı açık kümedir: bu aralıktaki her sayı bir iç noktadır (gene $\varepsilon = 0.5\min(d(a, x), d(b, x)) > 0$ koyarak). Boş küme açık kümedir (iç nokta olmayan elemanı yoktur). Uzayın kendisi açık kümedir. $A = (a, b]$ açık değildir çünkü b noktası iç nokta değildir.
4. $A \subseteq D$ olsun. A'nın D içinde tümleyeni açık kümeyse A **kapalı bir kümedir** denir. Reel sayılar için $A = [a, b]$ kapalı aralığı kapalı bir kümedir: çünkü tümleyeni $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ açık bir kümedir. Açık olmayan $A = (a, b]$ kümesi kapalı da değildir: tümleyeni $(-\infty, a] \cup (b, \infty)$ açık değildir.
5. Gösterilebilir ki:
   Her sayıda açık kümenin bileşimi açık bir kümedir,
   Sonlu sayıda açık kümenin kesişimi açık kümedir,
   Sonlu sayıda kapalı kümenin bileşimi kapalı kümedir,
   Her sayıda kapalı kümenin kesişimi kapalı kümedir.

Özelliklerin açık ve kapalı kümeler için simetrik oluşu bunların birbirlerinin tümleyeni olmasından kaynaklanır.

Aşağıdaki şekilde $\mathbb{R}^2$, yani düzlemde bir ε-komşuluğu (kenarları olmayan çember) tamamen A kümesi içinde kalan x_o iç noktası gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Düzlemde bir iç nokta

Tanım 2.4 (bir fonksiyonun limiti) f: D $\subseteq$ (X, d) $\rightarrow$ (Y, d) ve $x_o \in$ içD olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$x \in B(x_o, \delta) \rightarrow f(x) \in B(y^*, \varepsilon)$$

ya da özdeş olarak

$$d(x_o, x) < \delta \rightarrow d(y^*, f(x)) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, y* f(x) in x_o noktasındaki limitidir denir ve

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = y^* \quad \text{ya da} \quad x \rightarrow x_o \text{ için } f(x) \rightarrow y^*$$

olarak gösterilir.

Böylece yakınlığı ε-komşuluğu cinsinden de ifade edebileceğimizi görüyoruz. Bu tanımla aşağıdaki sonuç açıktır:

Teorem 2.1 f: D $\subseteq$ R $\rightarrow$ R olsun. Fonksiyon bir $x_o \in$ D noktasında ancak ve ancak

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

ise süreklidir.

Dolayısıyla bir fonksiyonun bir noktada sürekli olduğunu göstermek için fonksiyonun o noktada limitini hesaplayıp, bunun fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olduğunu göstermek gerekir. Eğer tek bir limit yoksa fonksiyon o noktada sürekli değildir. Limit bulmak için ilk yapılacak iş x_o değerini fonksiyonda yerine koymaktır. Eğer bu bir sayıysa limit bulunmuştur. Değilse (0/0, ∞ vb. çıkıyorsa) ek işlemler gerekir ve bu her zaman kolay bir iş değildir. Bizim amaçlarımız açısından aşağıdaki örneklerin incelenmesi limit hakkında yeterli bilgi verecektir.

Örnek 2.1

a. f(x) = a + bx olsun. Bu fonksiyonun limiti x = x_o koyarak f(x_o) = a + bx_o bulunur. Yani $\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ olur ve fonksiyon bu noktada süreklidir. Bu işlem her x_o için geçerli olduğundan bu fonksiyon süreklidir.

b. f(x) = ax^2 olsun. Bu fonksiyonun limiti x = x_o koyarak f(x_o) = x_o^2 bulunur. Dolayısıyla x $\rightarrow$ x_o için f(x) $\rightarrow$ y_o = f(x_o) olur ve fonksiyon süreklidir (x_o keyfidir).

c. f(x) = 1/(1 – x) olsun. Fonksiyonun x_o = 1 noktasında limiti yoktur. Çünkü, x = x_o koyarsak $x \rightarrow 1$ için $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{0} = \infty$ olur. Burada herhangi bir sadeleştirme yaparak

bu durumdan kurtulmak da mümkün değildir. Bu nedenle fonksiyon $x_o = 1$ noktasında limiti yoktur, sürekli de değildir.

d. $f(x) = \frac{|x|}{x}$ fonksiyonunun $x \to 0$ için limitini hesaplayalım. $x = 0$ koyarsak 0/0 belirsizlik hali çıkar. $x = 0$ noktasına nasıl yaklaştığımıza bağlı olarak bir limit hesaplanabilir, ama gene de fonksiyonun $x = 0$ noktasında limiti yoktur. Şöyle ki,

$x < 0$ için $f(x) = -1$

$x > 0$ için $f(x) = 1$

olur. O halde, $x = 0$ noktasına

soldan ($x < 0$) yaklaşıldığında $\lim_{x \to -0} |x| = -1$,

sağdan ($x > 0$) yaklaşıldığında $\lim_{x \to 0^+} x = 1$

olur. Bu ifadelerden ilkine **soldan limit** ($\lim_{x \to -0}$), ikincisine **sağdan limit** ($\lim_{x \to 0^+}$) denir. $\lim_{x \to 0^+} x = 1$ olduğunu görmek için bir $\varepsilon > 0$ için $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ aralığını ele alalım. $\delta = \varepsilon > 0$ koyarsak $(0, \delta)$ aralığındaki her sayı için $f(x) = 1$ dir. Yani $x \in (0, \delta) \to f(x) = 1 \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ olur. Benzer şekilde $x \in (-\delta, 0) \to f(x) = -1 \in (-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$ olur. Öyleyse, $x = 0$ noktasına yaklaştığımızda fonksiyon 0/0 belirsiz değeri değil, ya 1 ya da -1 değeri alır. Ama tek bir değer almadığı için $x = 0$ noktasında limiti yoktur ve bu noktada sürekli değildir. Bu örnekten şu sonuçlar çıkar:

- Limit, varsa, tektir. Bir fonksiyonun $x = x_o$ noktasında iki farklı limiti olamaz.
- Ancak ve ancak $\lim_{x \to -x_o} f(x) = \lim_{x \to x_o{}^+} f(x) = y^*$, yani soldan ve sağdan limitler aynı y^* değerini alıyorsa, $x \to x_o$ için $f(x) \to y^*$ olur.

Özetle bir fonksiyonun x_o noktasında limiti y^* dır diyebilmemiz için x_o noktasına ne suretle yaklaştığımıza bağlı olmaksızın fonksiyon y^* değerine yaklaşıyor olmalıdır.

2.2 Reel Değerli Fonksiyonlarda Süreklilik

Optimizasyon teorisi münhasıran değer kümesi reel sayılardan oluşan $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarıyla ilgilidir. Bu fonksiyonlar vektörden sayı yapar. Fayda ve üretim fonksiyonları reel değerli fonksiyonlardır. Aşağıdakiler reel değerli fonksiyon örnekleridir.

$f(x): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$; (1, 2) vektörünün görüntüsü $f(x) = 5$ olur.

$f(x)$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 - x_1x_3$; $f(1, 2, 3) = 2$ olur.
$f(x)$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^a y^b$, $a, b > 0$, Cobb-Douglas fonksiyonu
$f(x)$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{a1}x_2^{a2}x_3^{a3}x_4^{a4}$, $a_i > 0$, Cobb-Douglas fonksiyonu

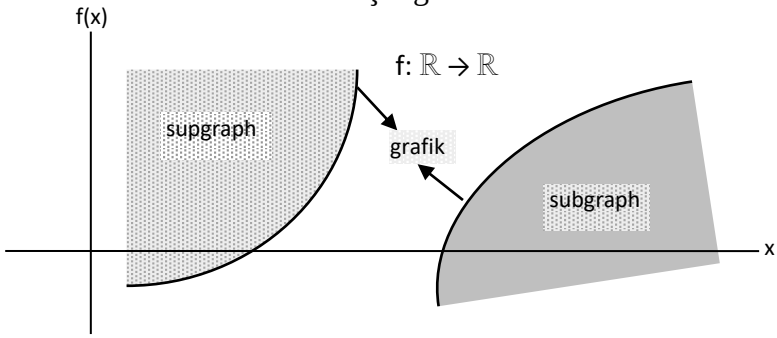
Bu fonksiyonların sürekliliğiyle ilgili daha spesifik sonuçlar ve bazı özellikler elde edeceğiz. Önce bu fonksiyonlarla ilgili tanımları görelim.

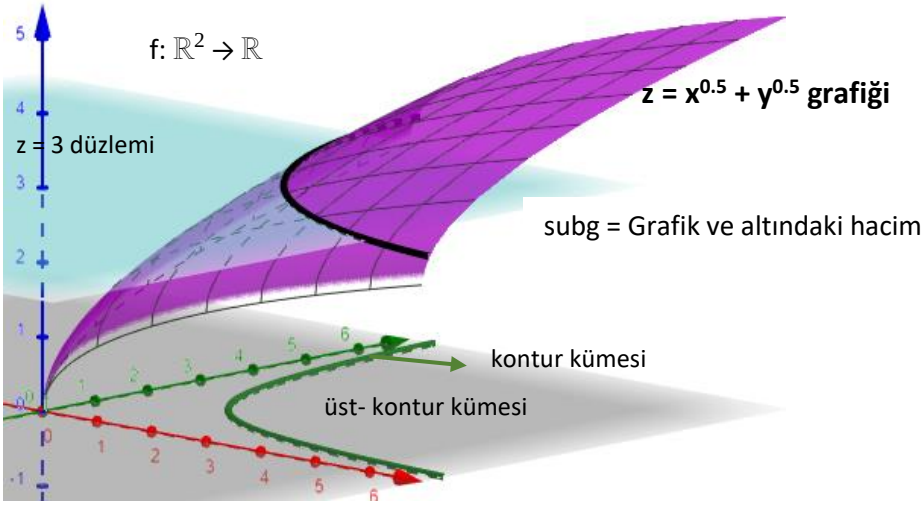
Tanım 2.5 $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun:

1. Fonksiyonun **grafiği** $\{(x, f(x)): x \in D, f(x) \in \mathbb{R}\} \subset D\times\mathbb{R}$ kümesidir,
2. Fonksiyonun **alt-grafiği (subgraph/hypograph):**
$$\{(x, z): x \in D, z \in \mathbb{R}, z \leq f(x)\} \subset D\times\mathbb{R} \text{ kümesidir,}$$
3. Fonksiyonun **üst-grafiği (supgraph/epigraph):**
$$\{(x, z): x \in D, z \in \mathbb{R}, z \geq f(x)\} \subset D\times\mathbb{R} \text{ kümesidir,}$$
4. Bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için, fonksiyonun **kontur** kümesi $\{x \in D: f(x) = \alpha\} \subset D$ kümesidir,
5. Bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için, fonksiyonun **üst-kontur** kümesi
$$\{x \in D: f(x) \geq \alpha\} \subset D \text{ kümesidir,}$$
6. Bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için, fonksiyonun **kesin-üst-kontur** kümesi
$$\{x \in D: f(x) > \alpha\} \subset D \text{ kümesidir}$$
7. Bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için, fonksiyonun **alt-kontur** kümesi
$$\{x \in D: f(x) \leq \alpha\} \subset D \text{ kümesidir,}$$
8. Bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için, fonksiyonun **kesin-alt-kontur** kümesi
$$\{x \in D: f(x) < \alpha\} \subset D \text{ kümesidir.}$$

Aşağıdaki görsellerde gösterildiği gibi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için grafik düzlemdeki olağan grafiktir; alt-grafik grafik ve altında kalan alanı (hacmi) içeren küme; üst-grafik ise grafik ve üstünde kalan alanı içeren kümedir. Mikro iktisadın eşürün ve kayıtsızlık eğrileri, sırasıyla, üretim ve fayda fonksiyonlarının kontur kümelerine örnektir. Kontur (seviye) kümeleri x-y düzlemine paralel olan $z = \alpha$ yükseklikte düzlemin fonksiyonla kesiştiği ara kesitin x-y düzlemindeki iz düşümüdür. Üst (alt) konur kümeleri fonksiyon değeri $z \geq \alpha$ olan x vektörlerinden oluşur. Kesin-alt ve üst kontur kümeleri ise eşitliğin sağlandığı noktaları, yani kontur kümesinin elemanlarını, içermez: fonksiyon değeri z (<) $> \alpha$ olan vektörlerdir.

Tanım 2.5 için görseller

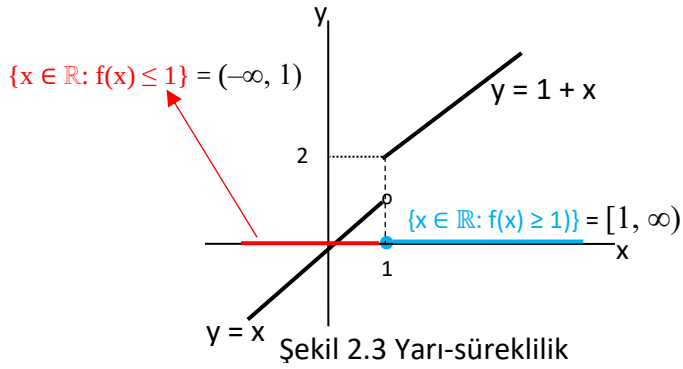




Tanım 2.6 f: $D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun.

1. Her $t \in \mathbb{R}$ için, $\{x \in D: f(x) \geq t\}$ üst-kontur kümesi kapalı bir küme ise, fonksiyon **üstten yarı-süreklidir (upper-semi continuous)** denir.
2. Her $t \in \mathbb{R}$ için, $\{x \in D: f(x) \leq t\}$ alt-kontur kümesi kapalı bir küme ise, fonksiyon **alttan yarı-süreklidir (lower-semi continuous)** denir.

Açık olması gerektiği gibi **f üstten-yarı süreklidir ↔ –f alttan-yarı süreklidir** (çünkü –1 ile çarpılınca eşitsizlikler yön değiştirir) ve birisi için doğru olan her şey diğeri için de doğrudur.



Şekil 2.3 Yarı-süreklilik

Şekil 2.3'te daha önce de gördüğümüz f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + x, x \geq 1 \\ x, \quad x < 1 \end{cases}$ fonksiyonu gösteriliyor. t = 1 için üst-kontur kümesi $\{x \in \mathbb{R}: f(x) \geq 1\} = [1, \infty)$ olur ve kapalı bir kümedir. Öyleyse fonksiyon x = 1 noktasında üstten yarı-süreklidir. Öte yandan, t = 1 noktasında alt-kontur kümesi $\{x \in \mathbb{R}: f(x) \leq 1\} = (-\infty, 1)$ olur ve açık bir kümedir. Öyleyse fonksiyon x = 1 noktasında alttan yarı-sürekli değildir. Yukarıda gördüğümüz gibi fonksiyon x = 1 noktasında sürekli de değildir. Ama $t \neq 1$ olan her noktada fonksiyon süreklidir ve hem alt, hem üst-kontur kümeleri kapalıdır (örneğin t = 0.5 için alt ve üst kontur kümeleri, sırasıyla, $(-\infty, 0.5]$, $[0.5, \infty)$ olur).

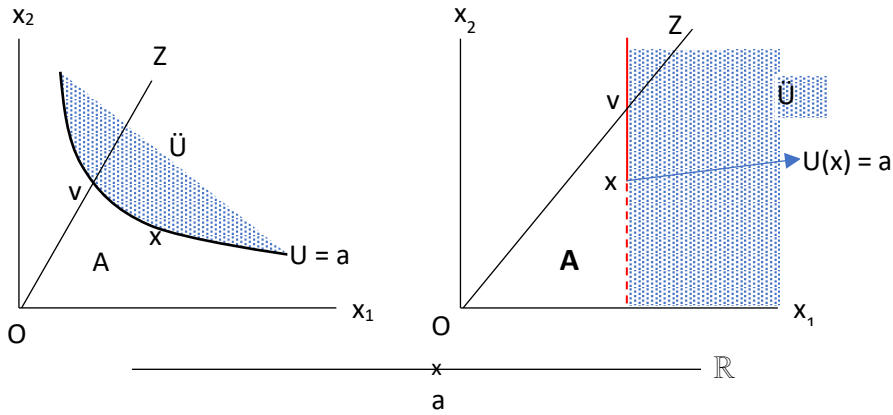
Teorem 2.2 f: $D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Fonksiyon ancak ve ancak üstten ve alttan yarı-sürekliyse süreklidir.

Örnek 2.2 (Fayda Fonksiyonu)

Bilindiği gibi fayda fonksiyonları her biri $\mathbb{R}^n$ de bir vektör olan $(x_1, x_2, ..)$ mal sepetlerine reel sayı, U(x), atfeden fonksiyonlardır. Buna göre x^o ve y^o iki mal sepeti olmak üzere atfedilen sayılar

x^o sepeti y^o sepetine tercih ediliyorsa $U(x^o) > U(y^o)$
x^o ve y^o sepetleri arasında kayıtsız kalınıyorsa $U(x^o) = U(y^o)$

koşullarını sağlamalıdır. Gene bilindiği gibi bu fonksiyonun kontur eğrileri U(x) = a şartını sağlayan kayıtsızlık eğrileridir.



Şekil 2.4 Sürekli ve süreksiz fayda fonksiyonları

Şekil 2.4'ün sol panelinde "olağan" bir kayıtsızlık eğrisi gösterilmiştir. U = a eğrisi üzerinde, x ve v gibi, bütün sepetler aynı tercih düzeyindedir ve fayda indeksleri U = a olur. U = a kayıtsızlık eğrisi hem (taralı) Ü (üst-kontur: $U(x) \geq a$) ve hem de A (alt-kontur: $U(x) \leq a$) kümesindedir. Dolayısıyla hem üst hem de al-kontur kümeleri kapalıdır. OZ üzerinde sağa-yukarıya doğru ilerledikçe daha fazla mal içeren sepetlere geçilir ve fayda artar. Böylece OZ üzerinde hareket ettikçe A kümesi içindeyken altta gösterilen reel sayılar doğrusu üzerinde $U(x) < a$ olmak üzere monoton artan sayılar verilerek ilerlenir; OZ ile kayıtsızlık eğrisinin kesiştiği v noktasında $U(v) = a$ olur ve sonrasında U değeri artarak ilerlenir. Böylece tercihleri temsil eden sürekli bir fonksiyon oluşturulmuş olur.

Şekil 2.4'ün sağ panelinde "sözlüksel sıralamalı" tercihler gösterilmiştir. Buna göre $S_1 = (x_A, y_A)$ ve $S_2 = (x_B, y_B)$ iki mal sepeti olmak üzere:

> $x_A > x_B$ ise S_1 S_2'ye tercih edilir (y-malının ne kadar içerildiğinden bağımsız olarak S_1 sepeti daha fazla x-malı içeriyorsa S_2 sepetine tercih edilir)
>
> $x_A = x_B$ ve $y_A > y_B$ ise S_1 S_2'ye tercih edilir (iki sepet de aynı miktarda x-malı içerirken, daha fazla y-malı içeren sepet diğerine tercih edilir.)

Buna göre şekildeki x sepetiyle kayıtsız kalınan başka sepet yoktur: diğer bütün sepetler ya daha fazla/az x_1-malı, ya da aynı x_1-malıyla daha fazla/az x_2-malı içerir. Yani bu tercih sıralamasıyla kayıtsızlık eğrisi tek bir noktadan (x) oluşur. Şekildeki üst-kontur kümesi (Ü) düz kırmızıyla gösterilen sınır dahil, ama kırık kırmızı çizgiyle gösterilen sınır hariç kümedir ve açık ya da kapalı değildir. Tümleyeni olan A alt-kontur kümesi de açık ya da kapalı değildir: kırık kırmızı çizgi bu küme içindedir

ve üzerindeki hiçbir nokta iç nokta değildir. Ü içinde sadece U(x) = a dır, diğer bütün sepetler için, v gibi, U(.) > a dır. Dolayısıyla OZ üzerinde A içindeyken fayda U(.) < a kalmak üzere artarak ilerler ve v noktasına geldiğinde U(v) > a olur, yani sıçrar. Kontur kümeleri kapalı olmayan sözlüksel sıralamalı tercihler sürekli bir fayda fonksiyonu ile temsil edilemez.

Reel değerli fonksiyonlar için aşağıdaki işlemleri tanımlayabiliriz:

Tanım 2.7 $D \subseteq \mathbb{R}^n$, f: D → ℝ, g: D → ℝ, a, b ∈ ℝ olsun. Her x ∈ D için,

1. Skalar çarpım: af = af(x), (a = –1 için –f = –f(x) olur),
2. Toplama: (af + bg)(x) = af(x) + bg(x),
3. Çıkarma: (af – bg)(x) = af(x) – bg(x),
4. Çarpım: (f.g)(x) = f(x)g(x),
5. Bölme: (f/g)(x) = f(x)/g(x), g(x) ≠ 0.

Tanım 2.8 Aynı küme üzerinden tanımlı reel değerli **sürekli fonksiyonlar kümesini *C*** = {f: D ⊆ $\mathbb{R}^n$ → ℝ: f sürekli fonksiyondur} ile göstereceğiz.

Teorem 2.3 f, g ∈ ***C*** ve a, b ∈ ℝ için aşağıdakiler doğrudur:

1. f: D ⊆ (X, d) → (Y, d) ve g: f(D) ⊆ (Y, d) → (Z, d) ise $(g \circ f)$: D ⊆ (X, d) → (Z, d) bileşke fonksiyonu da süreklidir.
2. af ∈ ***C*** (sürekli fonksiyonların skalar çarpımları süreklidir),
3. (af ± bg) ∈ ***C*** (sürekli fonksiyonların doğrusal bileşimleri süreklidir),
4. (f.g) ∈ ***C*** (sürekli fonksiyonların çarpımı süreklidir),
5. g(x) ≠ 0 olmak üzere (f/g) ∈ ***C*** (sıfırla bölme yapılmadığı sürece sürekli fonksiyonların bölümü süreklidir).

Bu teoremle birçok fonksiyonun sürekliliğini göstermek kolaylaşır. Örneğin f(x) = 1 + x ve g(x) = x^2 fonksiyonları sürekli olduğundan g/f = $x^2/(1 + x)$ de süreklidir. x^n = x.x…x fonksiyonu süreklidir. Buradan, f(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_o$ (a_i ∈ ℝ) gibi polinomlar da süreklidir

Aslında bu kitapta karşılaşacağımız açık olarak tanımlı fonksiyonlar, aksi belirtilmedikçe, süreklidir.

2.3 Vektör Değerli Fonksiyonlarda Süreklilik

Bu bölümde $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ biçiminde yani görüntüsü vektör olan fonksiyonları ele alacağız. Örneğin,

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, x^2)$ reel sayılar üzerinde tanımlı vektör değerli bir fonksiyondur.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x, x + y, xy)$, düzlemdeki vektörlerden uzayda vektörler yaratan bir fonksiyondur.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(Y, C) = (Y - C - I, a + bY - C)$ vektör değerli bir fonksiyondur. Burada I, a, b sabitler ya da parametrelerdir. Bu fonksiyon en basit gelir belirleme modelini ifade eder. Fonksiyonu herkesin tanıyacağı

$Y = C + I$
$C = a + bY, a > 0, 0 < b < 1$

biçiminde de yazabiliriz. Dikkat edilmesi gereken husus bunu yapmakla fonksiyonu $f(Y, C) = 0$ biçiminde yazmış oluyoruz. $f(Y, C) = 0$ iktisatçıların 'denge' dediği durumun ifadesidir ve parametrelere konulan kısıtlarla birlikte bir iktisadi model tanımlar.

Genel olarak $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$

biçimindedir ve her $f_i(x)$ fonksiyonu $f_i: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyondur. f_i fonksiyonlarına **bileşen fonksiyonlar** denir.

Örneğin, $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x, x + y, xy)$ fonksiyonunun

$$f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = x + y, f_3(x, y) = xy$$

olmak üzere üç bileşen fonksiyonu vardır. Buna göre $f(x, y) = (z_1, z_2, z_3) \in f(D) \subseteq \mathbb{R}^3$ ise, $z_1 = f_1(x, y)$, $z_2 = f_2(x, y)$, $z_3 = f_3(x, y)$ olur. Genel olarak bir vektör değerli fonksiyonun görüntü uzayındaki vektörlerin her bir bileşeni bir bileşen fonksiyonla tanımlanır: $z_i = f_i(x)$.

Teorem 2.4 $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ vektör değerli bir fonksiyon olsun. $f(x)$ ancak ve ancak her bir $f_i: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$ bileşen fonksiyonu sürekli ise süreklidir.

Buna göre vektör değerli fonksiyonların süreklilik özelliklerini reel değerli fonksiyonların özelliklerinden görebiliriz. Örneğin

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x, x + y, xy)$

fonksiyonu her üç bileşen fonksiyonu da sürekli olduğundan süreklidir.

2.4 Sürekliliğin Sonuçları

$f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların en önemli özellikleri aşağıdaki teoremden türer.

Teorem 2.5 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekliyse $f([a, b])$ görüntü kümesi de bir aralıktır.

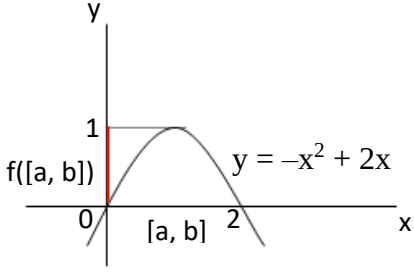
Örneğin, $y = -x^2 + 2x$ sürekli fonksiyonu altında $[0, 2]$ aralığının görüntüsü $[0, 1]$ aralığıdır (Şekil 2.5).

Teorem 2.6 (**Ara değer teoremi**) $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f(a) < f(b)$ olsun. O halde her $f(a) < x \in \mathbb{R} < f(b)$ için $f(c) = x$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ vardır. Yani sürekli bir fonksiyon iki farklı değer alıyorsa, bunların arasındaki her değeri alır. Özel olarak da $f(a) < 0 < f(b)$ ise $f(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ vardır.

Çünkü, $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$ dir ve bu da bir önceki teoremden bir aralıktır. Yani teoremin şartlarını sağlayan $x \in f([a, b])$ olur ve tanım gereği her $x \in f([a, b])$ için bir $c = f^{-1}(x) \in [a, b]$ olmalıdır. Teoremin özel halinin iktisadi bir uygulaması için piyasa dengesi modelini ele alalım. D talep, S arz, p fiyat olmak üzere modelde

$ED(p) = D(p) - S(p)$

talep fazlası fonksiyonu tanımlanır. Denge fiyatı $ED(p^*) = 0$ şartını sağlayan p^* fiyatıdır. Eğer $ED(p)$ fonksiyonu sürekliyse ve bir p_o için $ED < 0$; farklı bir p_1 için $ED > 0$ oluyorsa arada bir p^* için $ED(p^*) = 0$ olmalıdır: denge vardır.



Şekil 2.5

Reel sayılarda [a, b] aralığının yukarıdaki özellikleri kapalı ve sınırlı olmasının sonucudur. $D \subset \mathbb{R}$ kümesi **sınırlı** ise elemanları arasındaki en büyük uzaklık sonludur: $M > 0$ bir sayı olmak üzere $x, y \in D \rightarrow d(x, y) < M$. $\mathbb{R}$ içinde [a, b] aralıkları kapalı ve sınırlıdır (en uzak mesafe b – a olur). $\mathbb{R}^n$ uzayında kapalı ve sınırlı kümelere **tıkız (compact)** kümeler denir. Bu terminolojiyle genel bir teorem "tıkız kümelerin sürekli görüntüsü tıkızdır" olarak ifade edilen çok önemli bir teoremdir. Teorem 2.5 bunun sonucudur. $\mathbb{R}^n$ için benzer bir sonuç için $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathbf{[x, y]} = tx + (1 - ty)$, $0 \leq t \leq 1$, aralığını, yani iki noktayı birleştiren doğru parçasını tanımlayalım.

Teorem 2.5′ f: $\mathbf{[x, y]} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekliyse f($\mathbf{[x, y]}$) görüntü kümesi $\mathbb{R}$'de bir aralıktır.

Örneğin $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonu altında $\mathbf{[(0, 0), (1, 1)]} \subset \mathbb{R}^2$ aralığının (orijinle (1, 1) vektörünü birleştiren doğru parçasının) görüntüsü [0, 2] aralığıdır.

Teorem 2.6′ (**$\mathbb{R}^n$ için ara değer teoremi**) f: $D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon; $x, y \in D$ için $f(x) < f(y)$ ve $\mathbf{[x, y]} \subset D$ olsun. O halde $f(x) \leq c \leq f(y)$ şartını sağlayan her $c \in \mathbb{R}$ için, $f(z) = c$ olacak şekilde bir $z \in \mathbf{[x, y]}$ vardır. Yani sürekli bir reel değerli fonksiyon iki farklı değer alıyorsa bunların arasındaki her değeri alır.

"Tıkız kümelerin sürekli görüntüsü tıkızdır" teoreminden optimizasyon teorisinin en önemli sonuçlarından birisi elde edilir.

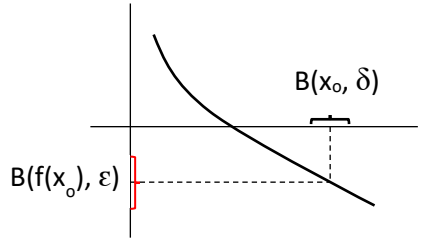
Teorem 2.7 (Weierstrass uç değer teoremi) f: $D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve D tıkız (kapalı ve sınırlı) olsun. O halde f D üzerinde maksimum ve minimum değerleri alır. Yani her $x \in D$ için $f(x^*) \geq f(x)$, $f(y^*) \leq f(x)$ olacak şekilde $x^*, y^* \in D$ vardır.

Çünkü, D tıkızsa, $f(D) \subset \mathbb{R}$ tıkızdır, yani kapalı ve sınırlıdır. Sınırlı reel sayı kümelerinin en küçük ve en büyük elemanları vardır ve bunlar da küme kapalıysa kümenin elemanı olur (bu önerme de önemli ve ispatlanan bir sonuçtur). Bu teoremi iyi anlamak gerekir. Reel değerli bir fonksiyonun bir küme üzerinde maksimumu (minimumu) aldığı en büyük (küçük) değerdir. Örneğin $f(x) = x^2$ fonksiyonunun (0, 1) açık aralığında ne maksimumu ne de minimumu vardır. Ama [0, 1] tıkız aralığında maksimumu $x = 1$ noktasında, minimumu $x = 0$ noktasında olur. Benzer şekilde $f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun **((0, 0), (1, 1))** aralığında yani iki noktayı birleştiren ama noktaları içermeyen doğru parçasında oluşan küme üzerinde maksimumu ya da minimumu yoktur. Ama **[(0, 0), (1, 1)]** tıkız kümesi üzerinde maksimumu (1, 1)

noktasında, minimumu (0, 0) noktasındadır. Öte yandan kapalı ve sınırlı olmadığı halde bir küme üzerinde sürekli olmayan bir fonksiyonun bile maksimumu/minimumu olabilir. Teorem maksimum/minimum olması için fonksiyon sürekli, tanım kümesi tıkız olmalıdır demiyor: sürekli reel değerli fonksiyonların her tıkız küme üzerinde maksimum/minimumu olur diyor.

Teorem 2.8 $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer bir $x \in D$ için $f(x) > 0$ (ya da < 0) ise, öyle bir $B(x, \delta) \subset D$ vardır ki her $z \in B(x, \delta)$ için, $f(z) > 0$ (< 0) olur.

İspat: $f(x) < 0$ olsun. Fonksiyon x noktasında sürekli olduğuna göre Tanım 2.2'den her $\varepsilon > 0$ için, $d(z, x) < \delta \to d(f(z), f(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. $\varepsilon = |f(x)|/2$ koyarsak sonuç görülür.



Yani sürekli reel değerli bir fonksiyonun bir noktadaki değerinin işareti neyse o noktanın yakın bir komşuluğundaki değerleri de aynı işareti haizdir, sürekli fonksiyon birden bire işaret değiştirmez.

Kaynaklar:

M. Carter, 2001. *Foundations of Mathematical Economics*, MIT Press.
T. Apostol. 1974. *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley.